

**CNED**

**Epreuves d'Examen**

**Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)**  
DEUG-MIAS/CNED

**Module MIA6**  
**Juin 1998**  
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

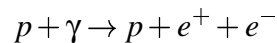
---

**Temps recommandés** : Problème I : 45 mn ; Problème II : 1 h 15.  
Les vecteurs sont indiqués en caractères gras.

---

## I. Relativité - Collisions

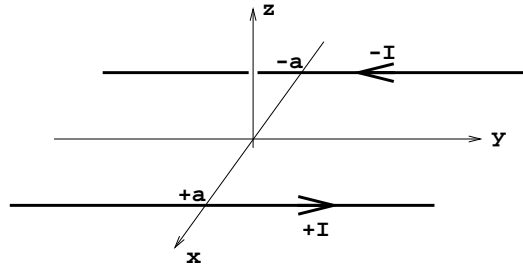
1. On considère la collision frontale de deux particules définies par leurs masses au repos ( $m_1, m_2$ ), leurs énergies totales ( $E_1, E_2$ ) et leurs quantités de mouvement ( $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ ). Etablir, en fonction de ces paramètres, l'expression de l'énergie totale disponible dans le centre-de-masse de ce système de particules (ou du carré de cette énergie).
2. On considère le cas particulier de la collision entre un proton (particule 1) et un photon (particule 2, de masse nulle). Dans le cas envisagé, le proton est un rayon cosmique d'énergie inconnue, le photon a l'énergie moyenne du rayonnement fossile à 3K, c'est-à-dire  $10^{-3}$  eV (électron-volt). Quelle doit être l'énergie minimum (seuil de réaction) du proton (en eV) pour que la réaction inélastique :



puisse avoir lieu. Application numérique.

On donne les masses au repos : des électrons et positrons  $m_+ = m_- = m = 0,5$  MeV/c<sup>2</sup> ; protons :  $M \approx 1$  GeV/c<sup>2</sup>.

## II. Magnétostatique - Courants induits



On considère une ligne bifilaire formée de deux fils conducteurs infiniment longs, situés dans le plan  $xOy$  et parallèles à l'axe  $Oy$  dont ils sont distants de  $\pm a$ . On prend comme sens positif des courants le sens  $y > 0$ . Le fil situé en  $x = +a$  est parcouru par un courant  $I > 0$  tandis que le fil situé à  $x = -a$  est parcouru par le courant  $-I$ .

1. Indiquer, en le justifiant, la direction et le sens du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$  du plan  $xOy$ . De quelles variables dépend ce champ? Calculer  $\vec{B}(M)$ .
2. On place le long de l'axe des  $y$  un conducteur (C) également filiforme parcouru par un courant  $i > 0$ . Quelle est la force subie par une longueur  $\Delta y$  de ce fil?
3. Calculer, dans les conditions de la question 2 (c'est-à-dire en présence des trois conducteurs filiformes), le flux magnétique traversant une boucle rectangulaire de longueur  $\Delta y$  et dont deux côtés sont des segments parallèles à  $Oy$  et placés en  $x = \pm a/2$ .
4. Le conducteur (C) est laissé libre de se déplacer dans le plan  $xOy$  sous l'action de la force calculée à la question 2. Comment varie qualitativement le flux magnétique à travers le rectangle de la question (3)? [On peut négliger les effets dus aux courants induits.]
5. La boucle rectangulaire fictive de la question 3 est remplacée par un cadre métallique. Indiquer (sans le calculer) le sens du courant induit dans ce cadre par le déplacement du conducteur (C).

# Juin 1998 : Corrigé

## I. Relativité - Collisions

On utilise la convention  $c = 1$  dans les équations littérales.

1. En écrivant l'invariance des 4-vecteurs Energie-Quantité de Mouvement dans les référentiels de la collision et du centre-de masse (CM, repéré par des astérisques), on obtient :

$$E^{*2} = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta)$$

où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  et  $p_1, p_2$  les modules de ces vecteurs. [Rappel : le référentiel du CM est défini par la relation  $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0$ .] Pour une collision frontale,  $\theta = \pi$  d'où :

$$E^{*2} = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 + p_1 p_2)$$

2. Dans le cas particulier envisagé, on a  $m_1 = M, m_2 = 0$  et, pour un photon (particule de masse nulle),  $E_2 = p_2$ . Alors la relation ci-dessus se réduit à :

$$E^{*2} = M^2 + 2E_2(E_1 + \sqrt{E_1^2 - M^2})$$

où pour le proton on a utilisé la relation d'Einstein :  $p_1 = \sqrt{E_1^2 - M^2}$ . Le seuil de la réaction est par définition l'énergie pour laquelle les particules de l'état final sont immobiles dans le CM. Donc :  $E^* = M + 2m$ . Un peu d'algèbre aboutit à la relation :

$$\frac{2m(M+m)}{E_2} - E_1 = \sqrt{E_1^2 - M^2}$$

et en élevant au carré les deux membres on obtient finalement :

$$E_1 = \frac{F}{2} + \frac{M^2}{2F}$$

où on a posé :  $F = 2m(M+m)/E_2 \approx 2mM/E_2$ . Application numérique : On trouve  $F \approx 10^9$  GeV et  $E_1 \approx F/2 = 5 \times 10^{17}$  eV.

## II. Magnétostatique - Courants induits

1. Le plan  $xOy$  est un plan de symétrie de la distribution de courants. Par conséquent, le champ  $\vec{B}$  est normal à ce plan. Le système est de plus invariant par translation suivant la direction  $y$  :  $\vec{B}$  ne dépend pas de  $y$ . Donc dans le plan  $xOy$  (à  $z$  constant), on peut écrire :

$$\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$$

avec  $B > 0$  (les champs créés individuellement par les deux fils sont orientés dans le sens des  $z > 0$ ).

Le calcul du champ se fait facilement en se rappelant (ou en redémontrant rapidement, par le théorème d'Ampère) que le champ d'un fil rectiligne infini à la distance  $r$  du fil est (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (1)$$

Dans le plan des fils et au point  $M$  d'abscisse  $x$ , on a (en utilisant le principe de superposition) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) \vec{e}_z \quad (2)$$

2. On a l'expression de la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i dy \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z$$

où  $B_0 = B(x=0) = \mu_0 I / \pi a$ . On intègre en remarquant que la seule quantité variable est  $y$  :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I i \Delta y}{\pi a} \vec{e}_x$$

3. Le courant  $i$  crée un champ  $\vec{B}_C$  s'exprimant identiquement à (1) où on remplace  $I$  par  $i$ . A travers une surface disposée symétriquement de part et d'autre de l'axe des  $y$ , le flux total de ce champ est nul car en des points symétriques, le champ a le même module de part et d'autre mais son sens est opposé. Il reste donc seul à calculer le flux du champ des deux fils en  $\pm a$  (voir éq. 2) à travers la boucle rectangulaire. Orientons la surface de la boucle suivant les  $z > 0$  (rappel : ce choix est arbitraire, mais une fois fait, il impose un sens positif de circulation sur la boucle).

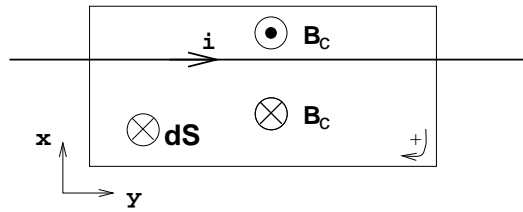
$$\phi = \int_S \vec{B}(x) \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

avec  $d\vec{S} = \Delta y dx \vec{e}_z$ .

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu_0 I \Delta y}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I \Delta y \ln 3}{\pi} \end{aligned}$$

4. D'après la question 2, la force de Laplace agit sur (C) de manière à le déplacer dans la direction des  $x > 0$ .

D'après l'orientation choisie pour les surfaces, on voit alors que c'est le flux *positif* à travers la boucle rectangulaire qui augmente.



5. On a vu à la question précédente que le flux total positif à travers le cadre était croissant quand (C) se déplace dans la direction des  $x > 0$ . La loi de Lenz nous dit qu'alors le courant induit doit s'établir de manière à s'opposer à cette variation de flux, c'est-à-dire à créer un flux négatif. Le courant induit circule donc dans le sens négatif (le sens positif, indiqué sur la figure, étant défini par l'orientation de la surface du cadre).

On peut invoquer également la loi de Faraday (au lieu de Lenz) :  $\mathcal{E} = -d\phi/dt$  en remarquant que  $d\phi/dt > 0$  donc  $\mathcal{E} < 0$  ce qui équivaut à dire que le courant circule dans le sens négatif du cadre conducteur.

# Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

## DEUG-MIAS/CNED

**Module MIA6**

**Juin 1999**

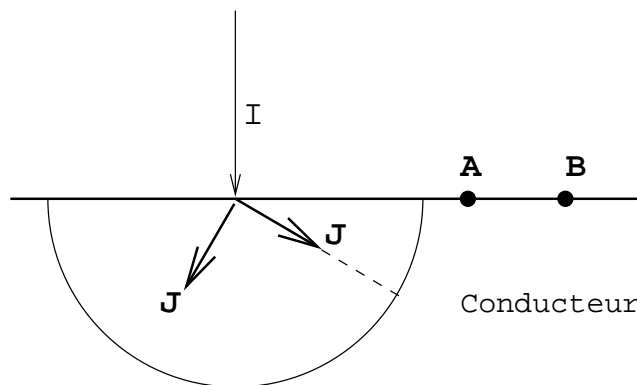
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

## I. Relativité

Le système Terre-Lune est considéré comme un référentiel fixe noté  $R$ . On prendra comme axe des  $x$  de ce référentiel la droite joignant les centres de la Terre et de la Lune (considérées comme ponctuelles) et orientée positivement de la Terre à la Lune. La distance qui sépare ces deux points est de 380000 km.

Un événement a lieu sur la Lune à un instant  $t_0$  dans  $R$ . Un second événement lui succède sur la Terre une seconde plus tard. Trouver la vitesse (module, direction, sens) d'un référentiel  $R'$  (par exemple une fusée) pour que dans  $R'$  les deux événements soient mesurés comme simultanés. Quelle est la distance qui sépare ces deux événements dans le référentiel  $R'$ ? Applications numériques.

## II. Courants volumiques - Paratonnerre



Un courant  $I$  pénètre par une pointe dans un conducteur massif (par exemple la terre) occupant un demi-espace (voir figure). Le courant se répartit dans ce demi-espace de manière isotrope (le module de la densité de courant  $\vec{J}$  ne dépend pas de la direction).

Calculer la densité de courant à une distance  $r$  de la pointe.

En faisant l'hypothèse que la terre est un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , en déduire la différence de potentiel entre deux points  $A$  et  $B$  situés respectivement à 1 m

et 1,5 m de la pointe et à la surface de la terre. Application numérique pour  $I = 1000$  A. La conductivité de la terre est de 0,05 SI. Qu'est-ce que ce problème a à voir avec le paratonnerre?

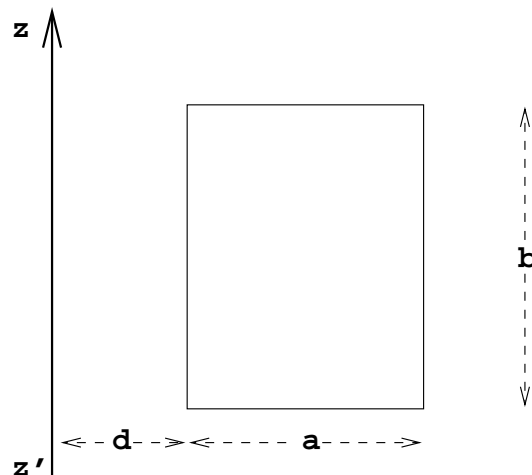
### III. Courants volumiques et champ

Dans un cylindre conducteur de rayon  $\rho$ , d'axe  $z'/z$ , de longueur infinie, circule un courant permanent  $I$  de densité :

$$\vec{J} = J(r)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad J(r) = J_0 \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)$$

$J_0 (> 0)$  et  $\rho$  sont les données du problème en fonction desquelles seront calculés les résultats demandés dans la suite.

1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par ce courant en tout point de l'espace (intérieur et extérieur au cylindre).



Un second conducteur  $C$  de forme rectangulaire est disposé comme indiqué sur la figure ci-dessus dans un plan contenant l'axe  $z'/z$  et à une distance  $d > \rho$  de cet axe. Le circuit  $C$  est considéré comme étant purement résistif et sa résistance est  $R$ .

2. Tout en laissant  $C$  dans un plan contenant l'axe  $z'/z$  à une distance  $d$  fixe, on fait tourner ce plan d'un mouvement uniforme autour de l'axe  $z'/z$ . Que se passe-t-il alors dans le circuit  $C$ ? Calculer la force électromotrice (fém) éventuelle  $\mathcal{E}$  créée dans  $C$ .
3. Le plan contenant  $C$  reste maintenant fixe mais on éloigne  $C$  de l'axe avec un mouvement uniforme de manière à ce que la distance  $d$  devienne :  $d = d_0 + vt$  avec  $v > 0$ . Quel est le sens du courant  $i$  dans  $C$ ? Exprimer (algébriquement) la fém  $\mathcal{E}$  à un

instant  $t$ . On précisera soigneusement les conventions de signe, éventuellement à l'aide d'un dessin.

## I. Relativité

Repérons par les indices 1 et 2 respectivement la Terre et la Lune. On notera  $\Delta t = t_2 - t_1$  l'intervalle de temps entre les deux événements et  $\Delta x = x_2 - x_1$  leur distance dans  $R$ . On a :

$$\Delta t = -1 \text{ s} \quad ; \quad \Delta x = +380000 \text{ km}$$

Les deux événements sont simultanés dans  $R'$  si  $t'_2 = t'_1$  ou encore  $\Delta t' = 0$ . L'équation de transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left( \Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right) = 0 \\ \Rightarrow \beta &= \frac{c \Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

A.N. :  $\beta = -0,79$  ou  $v = -237000 \text{ km/s}$ . La fusée doit se déplacer de la Lune vers la Terre. La distance entre les deux événements peut être calculée en appliquant l'équation de transformation à la distance  $\Delta x'$ . On peut aussi dire directement que, puisque les deux événements sont simultanés dans  $R'$ ,  $\Delta x'$  est la longueur impropre correspondant à la longueur propre  $\Delta x$ , ou encore :

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = 233000 \text{ km}$$

## II. Courants volumiques - Paratonnerre

La densité courant, dans le volume du conducteur, est de la forme  $\vec{J} = J(r)\vec{e}_r$ . La densité de courant à travers la surface d'une demi-sphère vaut par conséquent :

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

La différence de potentiel entre deux points  $A$  et  $B$  quelconques d'un conducteur est, par définition :

$$V = \Phi_B - \Phi_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pour un conducteur ohmique  $\vec{E} = \vec{J}/\gamma$  et  $d\vec{l} = dr\vec{e}_r$  dans la cas présent. Donc :

$$V = \int_A^B \frac{1}{\gamma} J(r) dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

En notant  $R_B$  et  $R_A$  les distances entre la pointe et les deux points  $B$  et  $A$ , on a finalement :

$$V = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{R_B - R_A}{R_B R_A} = 1061 \text{ V}$$

La pointe peut être assimilée ici au conducteur (généralement un fil de faible résistance) qui relie le paratonnerre à la terre. L'exemple numérique montre qu'il peut être très dangereux de se placer à proximité d'une telle liaison (ou encore, par exemple d'un arbre qui peut jouer le même rôle) avec les pieds écartés radialement par rapport au point de contact électrique.

### III. Courants volumiques et champ

La géométrie des courants impose le choix des coordonnées cylindriques dans cet exercice. D'après les symétries et invariances (voir cours), le champ est de la forme  $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\phi$ .

1. Le calcul du champ avec une telle géométrie suggère l'utilisation du théorème d'Ampère. En prenant un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  centré sur l'axe, et en appelant  $S$  la surface du cercle délimitée par ce contour, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ 2\pi r B(r) &= 2\pi\mu_0 \int_0^r J(r') r' dr' \end{aligned}$$

On distingue les deux cas suivants :

- (a)  $r \geq \rho$ . Le courant intérieur à la boucle est :

$$I_{\text{int}} = 2\pi J_0 \int_0^\rho \left(1 - \frac{r'}{\rho}\right) r' dr' = \frac{1}{3} \pi \rho^2 J_0$$

et le champ :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2}{6r} \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

(b)  $r \leq \rho$ . Alors :

$$I_{\text{int}} = 2\pi J_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r'}{\rho}\right) r' dr' = \frac{1}{3\rho} \pi J_0 r^2 (3\rho - 2r)$$
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r (3\rho - 2r)}{6\rho} \vec{e}_\varphi$$

2. Le champ magnétique est orthoradial et ne dépend que de  $r$ . Son flux à travers le cadre  $C$  est donc constant quand  $C$  tourne autour de l'axe  $z'z$  comme indiqué. Il n'y a pas de variation de flux, donc pas de fém dans  $C$ .
3. Le champ est (voir équation 1) :

$$\vec{B} = \frac{K}{r} \vec{e}_\varphi \quad \text{avec } K = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2}{6}$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers  $C$  :

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad \text{avec } \vec{dS} = b dr \vec{e}_\varphi$$
$$= Kb \ln \left( 1 + \frac{a}{d_0 + vt} \right)$$

Et la fém :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2 abv}{6(d_0 + vt)(a + d_0 + vt)}$$

Le courant est dans le sens positif (sens anti-trigonométrique) du circuit  $C$  de la figure.

**Module MIA6**  
**Septembre 1999**  
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

---

Rotationnel en coordonnées sphériques d'un vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi$$

Charge élémentaire =  $1,6 \times 10^{-19}$  C ;  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m ;  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  SI.  
Les vecteurs sont indiqués en caractères gras.

---

## I. Electrostatique - Modèle de noyau atomique

Un noyau atomique léger (numéro atomique  $Z$ , nombre de masse  $A$ ) peut être modélisé correctement à l'aide des données suivantes :

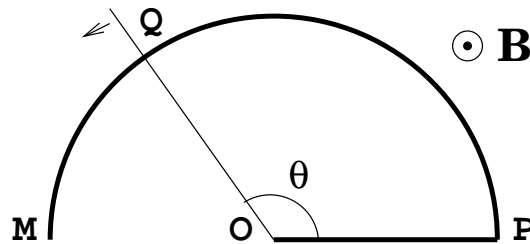
$$\begin{aligned} \text{Rayon du noyau } a &= a_0 A^{1/3} \\ \text{Densité de charge } \rho &= \rho_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad \text{si } r < a \\ \rho &= 0 \quad \text{si } r \geq a \end{aligned}$$

(où  $r$  est la distance du point courant au centre du noyau *supposé sphérique*). Par ailleurs, des expériences de diffusion élastique d'électrons permettent d'obtenir la valeur du paramètre  $a_0$  :

$$a_0 = 1,3 \times 10^{-15} \text{ m}$$

1. Trouver la relation entre la charge totale  $Q$  du noyau et son rayon effectif  $a$ . En déduire la valeur de la densité de charge à l'origine  $\rho_0$  pour un noyau de  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ . Application numérique.  
Dans la suite,  $\rho_0$  et  $a$  sont les deux paramètres en fonction desquels on exprimera les résultats littéraux demandés.
2. Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel scalaire  $\Phi$  à l'extérieur du noyau. On prendra le potentiel nul à l'infini.
3. Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel scalaire  $\Phi$  en un point à l'intérieur du noyau. A quelle distance du centre le champ est-il maximum ?

## II. Courants induits



A l'aide d'un fil conducteur en cuivre de section  $\sigma = 1 \text{ mm}^2$ , de résistivité  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ , on constitue un circuit de la manière suivante (voir figure). Un morceau de fil est courbé en un demi-cercle  $MP$  de centre  $O$ , de rayon  $r = 20 \text{ cm}$ . L'extrémité  $P$  du demi-cercle est reliée à  $O$  par une portion de fil rectiligne et fixe. Enfin le circuit est fermé par une autre portion de fil rectiligne pouvant pivoter autour de  $O$  et dont le contact avec le demi-cercle se fait en un point mobile  $Q$ . Le fil  $OQ$  fait un angle  $\theta$  avec  $OP$  et pivote avec une accélération angulaire constante  $a = 15 \text{ rad/s}^2$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $Q$  est en  $P$  ( $\theta = 0$ ) et la vitesse angulaire initiale est nulle. Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme  $B = 0,2 \text{ T}$ , perpendiculaire au plan du circuit. Dans la suite, on négligera les effets d'auto-induction.

1. Calculer la résistance du circuit en fonction de  $\theta$ .
2. Calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit en fonction de  $\theta$ .
3. Trouver la valeur de  $\theta$  pour laquelle le courant induit  $I(t)$  dans le circuit est maximum. Calculer numériquement cette intensité maximale. Indiquer le sens du courant quand  $\vec{B}$  est dirigé vers l'avant de la figure. Calculer la fém induite correspondante.

## III. Champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre, mesuré à partir de la surface de notre planète, est décrit avec une bonne approximation comme le champ créé par un dipôle magnétique à grande

distance. On supposera le dipôle localisé au centre de la Terre (origine des coordonnées) et on notera  $O_z$  l'axe de rotation de la Terre. On rappelle que le potentiel-vecteur d'un tel dipôle s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

où  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  est le moment magnétique du dipôle et  $\vec{r}$  le rayon-vecteur reliant le dipôle au point où on calcule le champ.

1. Calculer, dans un système de coordonnées approprié, le champ magnétique terrestre  $\vec{B}$  à la surface de la Terre en supposant que celle-ci est une sphère de rayon  $R$ .
2. Calculer la valeur numérique du module du moment magnétique terrestre sachant que le module  $B$  du champ magnétique au pôle nord vaut  $6,2 \times 10^{-5}$  T. On prendra  $R = 6400$  km.

## I. Electrostatique - Modèle de noyau atomique

1. On intègre la densité dans tout le volume du noyau :

$$Q = 20e = \int_V \rho(r) dV = \rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi}{15} \rho_0 a^3$$
$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{15Q}{8\pi a^3} = 2,2 \times 10^{25} \text{ C/m}^3$$

2. A partir de symétries et invariances, on montre que  $\vec{E} = E\vec{z}_r$  et  $\Phi = \Phi(r)$ . Pour le champ électrique on utilise le théorème de Gauss (sur une sphère de rayon  $r > a$ ). On peut en déduire  $\Phi$  à partir de  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -d\Phi/dr$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{8\pi}{15\epsilon_0} \rho_0 a^3$$
$$\Rightarrow E = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} ; \quad \Phi = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}$$

3. Même chose avec  $r < a$ .

$$4\pi r^2 E = \int_0^r \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right)$$
$$\Phi = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[ r^2 \left( \frac{r^2}{10a^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{a^2}{2} \right]$$

où la constante d'intégration de  $\Phi$  est calculée par continuité à  $r = a$ .

Le champ est maximum pour :

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{5}a}{3} \approx 0,7a$$

## II. Courants induits

1. Si  $\ell$  est la longueur totale du fil constituant le circuit, la résistance est :

$$R = \frac{\rho \ell}{\sigma} = \frac{\rho r}{\sigma} (2 + \theta)$$

2. Soit  $\phi$  le flux à travers le circuit. On prendra les surfaces orientées dans le même sens que le vecteur  $\vec{B}$  (ce qui fixe le sens positif du circuit dans le sens  $PQO$ ).

$$\phi = BS = \frac{1}{2} Br^2 \theta$$

3. L'équation horaire du mouvement de la barre est :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} at^2 \quad \text{et} \quad RI = \frac{d\phi}{dt} \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{\alpha t}{4 + at^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{aBr\sigma}{\rho} \end{aligned}$$

Le courant est maximum pour :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\alpha(4 - at^2)}{(4 + at^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{\sqrt{a}} \\ \text{A.N : } \theta &= 2 \text{ rad} \approx 115^\circ \\ I_{\max} &= \frac{2aBr\sigma}{\rho} \frac{1}{8\sqrt{a}} \approx 2,28 \text{ A} \end{aligned}$$

Suivant la loi de Lenz, le courant circule de manière à s'opposer à la variation (augmentation) de flux, donc dans le sens négatif  $QPO$ . La fém :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = R_0 I_{\max} \quad \text{avec} \quad R_0 &= \frac{4\rho r}{\sigma} = 1,36 \times 10^{-2} \Omega \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{E} = 30 \text{ mV} \end{aligned}$$

## III. Champ magnétique terrestre

1. On utilise  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  en coordonnées sphériques, avec  $\vec{A}$  en fonction de  $\vec{m}$  défini dans l'énoncé. On trouve (en remplaçant  $r$  par  $R$  après calcul) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

2. Au Pôle Nord,  $\theta = 0$  et  $r = R$ . La seule composante non nulle de  $\vec{B}$  est radiale :

$$B_r = B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$$
$$m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 8 \times 10^{22} \text{ A m}^2$$

**Module MIA6**  
**Juin 2000**  
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

---

**Temps recommandés** : Problème I : 20 mn ; Problème II : 60 mn ; Problème III : 40 mn.  
Les vecteurs sont indiqués en caractères gras.  
Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}$  SI

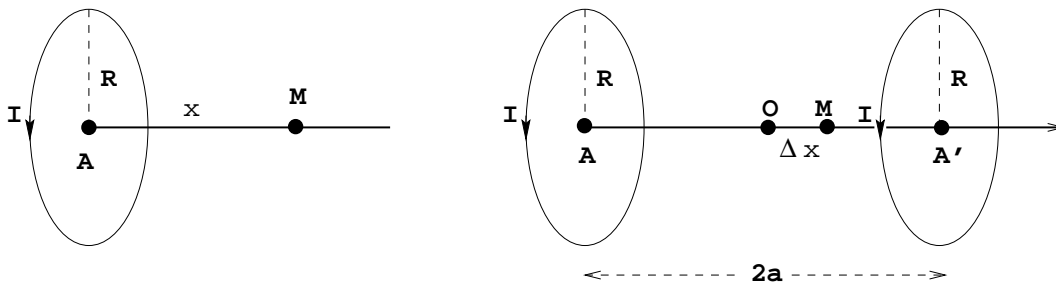
---

## I. Energie Electrostatique

On veut calculer la distance minimum d'approche dans une collision frontale entre deux noyaux atomiques : un noyau cible  $A$  de charge  $Ze$  et un noyau projectile  $B$  de charge  $ze$ . La *collision frontale* est définie par le fait que la droite qui porte la trajectoire rectiligne du noyau  $B$  passe par le centre du noyau  $A$ . On fait l'hypothèse que chaque noyau peut être représenté comme une distribution de charge sphérique.

Le noyau  $B$  part de l'infini avec une énergie cinétique  $E_0$ . Le noyau  $A$  reste immobile pendant tout le processus et son potentiel électrostatique est pris nul à l'infini. Quelle est la distance  $r_0$  entre les deux noyaux à laquelle le noyau  $B$  rebrousse sa trajectoire? Quelle est la force électrostatique entre les deux noyaux en ce point? Application numérique :  $E_0 = 2$  MeV (M=méga),  $Z = 74$  (tungstène),  $z = 2$  (hélium). Rappel :  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$  J.

## II. Bobine de Helmholtz



La bobine de Helmholtz, dont cet exercice présente un modèle simplifié, sert à créer un champ magnétique sensiblement uniforme dans une région limitée de l'espace.

Soit une spire conductrice circulaire de centre  $A$  et de rayon  $R$  dans laquelle circule un courant permanent  $I$ .

1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}(x)$  créé par cette spire en un point  $M$  de son axe tel que  $AM = x$ .
2. Exprimer le champ  $B$  en unités fondamentales du système SI (m, kg, s, A). Pour cela, il est conseillé de trouver une équation simple contenant  $B$  et d'autres grandeurs dont on connaît les dimensions.

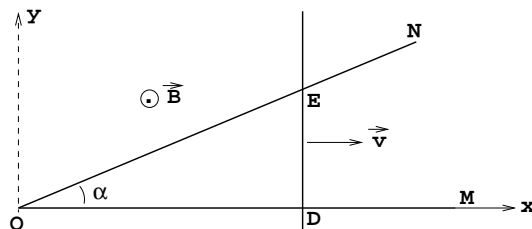
Soient maintenant deux spires identiques de centres respectifs  $A$  et  $A'$  dans lesquelles circule le même courant  $I$ , dans le même sens (voir figure). On pose  $AA' = 2a$  et on prend comme origine  $O$  de coordonnées le milieu du segment  $AA'$ .

3. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_0$  créé par les deux spires au point  $O$ .
4. Soit un point  $M$  de l'axe tel que  $OM = \Delta x$  avec  $\Delta x \ll a$ . Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}_M$  au point  $M$  est sensiblement égal à  $\vec{B}_0$ , s'il existe une certaine relation entre le rayon  $R$  des spires et leur distance  $2a$ . Pour cela, on écrira les deux termes (contributions des deux spires) qui constituent l'expression de  $B_M$  comme un développement limité au 3<sup>ème</sup> ordre et on cherchera la condition pour qu'à cet ordre (c'est-à-dire en négligeant les termes d'ordre 3) on ait  $B_M \approx B_0$ . On rappelle que :

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \pm \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots$$

5. La condition précédente étant supposée réalisée, calculer :
  - Le champ en  $O$ ;
  - Le champ en  $A$ ;
  - La variation relative du champ quand on passe de  $O$  en  $A$ .

### III. Courants induits



Deux fils conducteurs rectilignes semi-infinis  $OM$  et  $ON$  forment un angle  $\alpha$  en  $O$ . Le circuit est fermé par une barre  $DE$ , de grande longueur, pouvant glisser sans frottement en restant toujours perpendiculaire à  $OM$  choisi comme axe des  $x$  (voir figure). L'ensemble du circuit se trouve dans un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $D$  est en  $x_0$  et on impose à la barre un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse  $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ .

Les deux fils conducteurs semi-infinis ont une résistance négligeable et la barre  $DE$  a une résistance *par unité de longueur*  $r$  (soit  $R_{DE} = R = r \cdot DE$ ).

1. Expliquer la raison pour laquelle un courant apparaît dans le circuit. Préciser le sens de ce courant.
2. Donner l'expression de la force électromotrice  $e(t)$  induite dans le circuit. On définira un sens positif dans le circuit et on prendra soin de présenter les calculs avec les valeurs algébriques de toutes les grandeurs.
3. Déterminer l'intensité du courant induit  $i$ .  
Application numérique :  $B = 0,5 \text{ T}$  ;  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  ;  $r = 7 \times 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m}$ .
4. Calculer la quantité de charge qui traverse une section droite de la barre quand celle-ci a été déplacée de  $1 \text{ m}$  à vitesse constante. Application numérique avec la même valeur de la vitesse que dans la question précédente.

# Juin 2000 : Corrigé

## I. Energie Electrostatique

On utilise le principe de conservation de l'énergie totale d'un système isolé. Ici le système en question est constitué des deux noyaux. L'énergie totale est la somme des énergies cinétiques (en fait celle du noyau projectile  $B$  puisque le noyau cible est immobile) et de l'énergie potentielle électrostatique.

Prenons le centre du noyau  $A$  comme origine des coordonnées. Rappelons que l'énergie potentielle du système constitué d'une charge  $q$  placée dans le potentiel  $\Phi$  créé au point où se trouve  $q$  par une distribution de charge quelconque est  $q\Phi$ . Par conséquent, l'énergie totale du système quand le noyau  $B$  se trouve à une distance  $r$  quelconque du noyau  $A$  est :

$$W = ze\Phi(r) + E_c(r)$$

où  $E_c(r)$  est l'énergie cinétique de  $B$  à la distance  $r$  et  $\Phi(r)$  est le potentiel créé par  $A$  au point  $r$  :

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On écrit cette énergie totale (conservée) pour les deux positions extrêmes :  $B$  à l'infini (potentiel nul, énergie cinétique  $E_0$ ) et à la distance  $r_0$  (énergie cinétique nulle) :

$$W = E_0 = ze\Phi(r_0) \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_0}$$

A.N. :  $E_0 = 2 \text{ MeV} = 2 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , ce qui donne :  $r_0 = 1,1 \times 10^{-13} \text{ m}$ . La force électrostatique entre les deux noyaux à cette distance :

$$F_e = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 3 \text{ N}$$

## II. Bobine de Helmholtz

1. L'axe de la spire est l'intersection d'une infinité de plans d'antisymétrie des courants. Le champ créé par la spire est donc orienté suivant cet axe, et ne dépend que

de  $x$  :  $\vec{B} = B(x)\vec{e}_x$ . Le calcul du champ d'une spire sur son axe a été fait en exercice de TD (exercice 2.9). Le résultat est :

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

2. On peut par exemple utiliser l'expression de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . En équations aux dimensions cela s'écrit :

$$[F] = [QVB] = [QLT^{-1}B]$$

mais  $[Q/T]$  a la dimension d'un courant ( $I = dQ/dt$ ). Par ailleurs, une force a la dimension d'une masse que multiplie une accélération. Donc :

$$[MLT^{-2}] = [ILB] \Rightarrow [B] = [MI^{-1}T^{-2}] = \text{kgA}^{-1}\text{s}^{-2}$$

3. D'après le résultat précédent ( $B(x)$  toujours positif), les champs créés par chacune des spires s'ajoutent en  $O$  (à égale distance des spires) pour donner le champ total :

$$\vec{B}_0 = 2\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 IR^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

4. On applique le développement en  $x = a$  :

$$B_M = B(a + \Delta x) + B(a - \Delta x) \approx B_0 + \left( \frac{d^2 B}{dx^2} \right)_{x=a} (\Delta x)^2 + 0[(\Delta x)^3]$$

le dernier terme signifiant l'ensemble des termes négligeables d'ordre 3 ou supérieur. Donc :

$$B_M \approx B_0 \quad \text{si} \quad B''(x=a) = 0$$

$$B''(x) = 3\mu_0 IR^2 (R^2 + x^2)^{-5/2} \left( \frac{5x^2}{R^2 + x^2} - 1 \right)$$

Donc  $B''(a) = 0$  pour  $5a^2 = R^2 + a^2$  ou encore  $R = 2a$ . C'est la relation entre les rayons des spires et la distance qui les sépare.

5. Avec la condition précédente ( $R = 2a$ ) le champ en  $O$  vaut :

$$B_0 = \frac{4}{5^{3/2}} \frac{\mu_0 I}{a} = 0,358 \frac{\mu_0 I}{a}$$

En  $A$ , on calcule de même  $B_A = 0,338\mu_0 I/a$ . La variation relative est donc :

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B_0 - B_A}{B_0} = 0,056 \approx 6\%$$

### III. Courants induits

1. OED constitue un circuit. Quand ED se déplace, le flux de  $\vec{B}$  à travers ce circuit varie, d'où l'apparition d'un courant induit (loi de Faraday). Le courant s'établit de manière à s'opposer à la variation de flux (ou de manière à ce que la force de Laplace sur la barre mobile s'oppose à son mouvement), donc de E vers D.
2. Choisissons le sens positif dans le circuit dans le sens du courant induit. On a :

$$OD = x \quad ED = x \tan \alpha \quad \vec{B} = B \vec{e}_z \quad (B > 0) \quad d\vec{S} = -x \tan \alpha dx \vec{e}_z$$

La variation élémentaire de flux pour un déplacement  $dx$  de la barre est alors :

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = -Bx dx \tan \alpha$$

et la fém induite :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = +Bvx(t) \tan \alpha$$

3. La résistance (variable) du circuit est  $R = rxtan\alpha$  donc :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R(t)} = \frac{vB}{r} = c^{te}$$

A.N. :  $i = 1,4 \times 10^3$  A

4. On a  $i = dq/dt$  par définition. Comme  $i = c^{te}$ , on peut exprimer la charge totale qui traverse le circuit pendant un temps fini  $t$  :  $q = it$ . A la vitesse  $v = 2$  m/s, la barre se déplace de 1 m en 0,5 seconde. La charge totale est alors :  $q = 0,5 \times 1,4 \times 10^3 = 700$  C (ou en nombre d'électrons  $n_e = q/e \approx 4 \times 10^{21}$ ).

**Module MIA6**  
**(Septembre 2000)**  
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

---

**Temps recommandés** : Problème I : 45 mn ; Problème II : 1h15.

---

Gradient d'un champ scalaire  $f$  en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergence d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

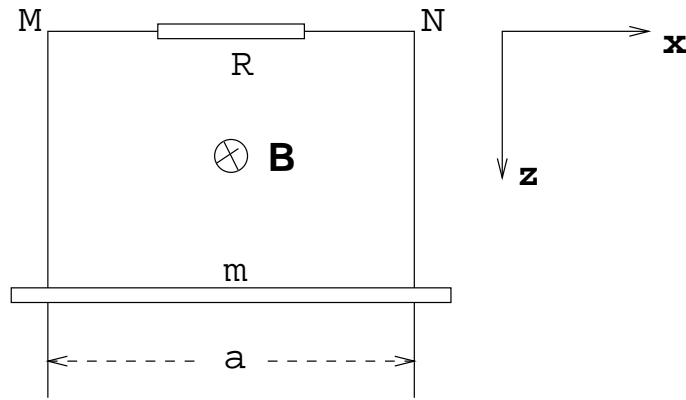
---

## 1 Potentiel de Yukawa

Une distribution de charges est caractérisée par un potentiel (à symétrie sphérique) :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$$

1. Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  qui dérive de ce potentiel en tout point.
2. En déduire la distribution volumique de charge  $\rho(r)$  responsable de ce champ et potentiel. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $\rho(r)$ .
3. Montrer que ce potentiel peut décrire correctement un atome. Pour cela on vérifiera que la charge totale dans tout l'espace est nulle et qu'une charge  $+q$  est située à l'origine des coordonnées. [Indication : une utilisation judicieuse du théorème de Gauss est une méthode possible pour répondre à cette question.]



## 2 Courants induits

Une barre homogène conductrice, de masse  $m$ , est assujettie à se déplacer en restant en contact avec deux rails conducteurs verticaux, distants de  $a$ . L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B\vec{e}_y$  ( $B > 0$ ), normal au plan des rails. Entre les extrémités  $M$  et  $N$  des barres verticales on place une résistance  $R$ . On négligera dans tout le problème : la résistance électrique de la barre et des rails ; les forces de frottement ; le champ magnétique créé par les courants induits.

1. Montrer qu'il apparaît une f.é.m. dans le circuit lorsque la barre glisse verticalement le long des rails sous l'effet de l'accélération de la pesanteur  $g$  et donner son expression en fonction de  $B, a$  et la vitesse  $v(t)$  de la barre.
2. Montrer que la barre est soumise à une force  $\vec{F}$  d'origine électromagnétique. Donner l'expression vectorielle de cette force.
3. Ecrire l'équation du mouvement de la barre. Vérifier que la fonction (vitesse) :  

$$v(t) = g\tau(1 - e^{-t/\tau})$$
est solution de cette équation, sachant qu'à l'instant  $t = 0$  la barre est lâchée sans vitesse initiale. Donner l'expression de la constante de temps  $\tau$  du circuit. Montrer qu'il existe une vitesse limite que l'on déterminera.  
A.N. :  $m = 10$  grammes ;  $a = 20$  cm ;  $B = 1$  T ;  $R = 1 \Omega$  ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . Calculer la vitesse limite.
4. Etablir l'expression du courant  $i(t)$  dans le circuit. Tracer la courbe représentative de cette fonction. Quelle est la valeur du courant  $I$  dans le circuit, quand celui-ci atteint le régime permanent ?
5. Calculer le travail fourni par les forces de pesanteur par unité de temps (puissance) quand la vitesse limite est sensiblement atteinte. Comparer cette valeur à la puissance consommée par effet Joule pour montrer que l'énergie totale du système (Terre + circuit) est bien conservée.

### 3 Potentiel de Yukawa

1. Pour alléger les notations, posons  $K = q/4\pi\epsilon_0$ . Le calcul du champ peut être fait directement par la relation  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Cette relation se réduit ici à :

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r &= K\frac{e^{-r/a}}{r}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\vec{e}_r \\ &= \frac{Ke^{-r/a}}{ar^2}(a+r)\vec{e}_r\end{aligned}$$

2. Utilisons la 1<sup>ère</sup> équation de Maxwell :

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \epsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E) \\ &= -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{e^{-r/a}}{r}\end{aligned}$$

La fonction représentative est une courbe (négative) monotone croissante, tendant vers  $-\infty$  quand  $r \rightarrow 0$  et vers 0 quand  $r \rightarrow \infty$ .

3. D'après la question précédente, la distribution de charges semble présenter une singularité à l'origine. Utilisons le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon  $r$  centrée sur l'origine. Le flux de  $\vec{E}$  à travers cette sphère est :

$$\phi_E = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{a}(a+r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Quand  $r \rightarrow 0$  alors  $Q_{\text{int}} \rightarrow q$ . Quand  $r \rightarrow \infty$  alors  $Q_{\text{int}} \rightarrow 0$ . Ceci vérifie bien les deux conditions requises.

### 4 Courants induits

1. Il apparaît dans la barre un champ électromoteur  $\vec{v} \times \vec{B}$  qui met les charges en mouvement. Prenons la barre  $MN$  comme origine des coordonnées verticales et soit  $z$  la cote qui repère la position de la barre mobile. La surface du circuit est :  $S = az$  et la fém ( $\phi$  étant le flux de  $\vec{B}$  à travers cette surface) :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Baz) = -Bav(t) \quad \text{avec} \quad v(t) = \frac{dz}{dt}$$

(les signes ici correspondent à une orientation du circuit dans le sens des aiguilles d'une montre).

2. Le courant positif circule dans le sens  $\vec{v} \times \vec{B} = vB\vec{e}_x$  dans la barre. La force de Laplace qui en résulte (en posant  $i$  le courant positif dans le circuit) :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= ia\vec{e}_x \times \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = -B\vec{e}_y \\ \vec{F}_L &= -iaB\vec{e}_z \end{aligned}$$

force qui est orientée vers le haut, comme on aurait pu l'établir par la loi de Lenz.

3. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit (en projection sur l'axe des  $z$ , toutes les forces et vitesses étant orientées suivant cet axe) :

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - i(t)aB \quad \text{avec} \quad i(t) = \left| \frac{\mathcal{E}}{R} \right| = \frac{aBv(t)}{R} \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{a^2B^2}{mR}v(t) = g - \frac{1}{\tau}v(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{a^2B^2} \end{aligned}$$

On peut vérifier que l'expression de  $v(t)$  donnée dans l'énoncé est bien une solution de cette équation.

Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $v(t)$  tend vers une vitesse limite :

$$v_\infty = g\tau = \frac{gmR}{a^2B^2}$$

Application numérique : on trouve  $v_\infty = 2,5 \text{ m/s}$ .

4. D'après ce qui précède :

$$i(t) = \frac{aBv(t)}{R}$$

La courbe représentative est une fonction positive croissante, monotone, tendant asymptotiquement vers la valeur :

$$I = \frac{aBv_\infty}{R} = \frac{mg}{aB}$$

5. Le travail des forces de pesanteur pour un déplacement  $dz$  est  $dW = mgdz$ . La puissance fournie au circuit dans le mouvement de chute de la barre est donc :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = mg\frac{dz}{dt} = mgv$$

ce qui vaut, quand la vitesse limite est atteinte :

$$\mathcal{P} = \frac{m^2 g^2 R}{a^2 B^2}$$

La puissance dissipée par effet Joule (quand le régime permanent est atteint) :

$$\mathcal{P}' = RI^2 = \frac{m^2 g^2 R}{a^2 B^2}$$

On constate que la puissance fournie par les forces de pesanteur est intégralement convertie en puissance dissipée par effet Joule (chaleur) donc l'énergie du système total est bien conservée instantanément.

**Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)**  
DEUG-MIAS/CNED

**Module MIA6**  
**Juin 2001**  
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

---

**Temps recommandés** : Problème I : 30 mn ; Problème II : 30 mn ; Problème III : 1 h.  
Les vecteurs sont indiqués en caractères gras. On rappelle les expressions du gradient d'une fonction scalaire  $\Phi$  et de la divergence d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

---

## I. Champ et potentiel électrostatiques

### A. Champ uniforme

Exprimer le potentiel scalaire  $\Phi$  dont dérive un champ électrique uniforme dans tout l'espace :  $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ . Quelles sont les surfaces équipotentielles ?

### B. Potentiel de Yukawa

[Le potentiel qui est traité dans cet exercice intervient dans de multiples situations physiques, en particulier dans les gaz ionisés où les forces d'interaction sont à longue portée.]

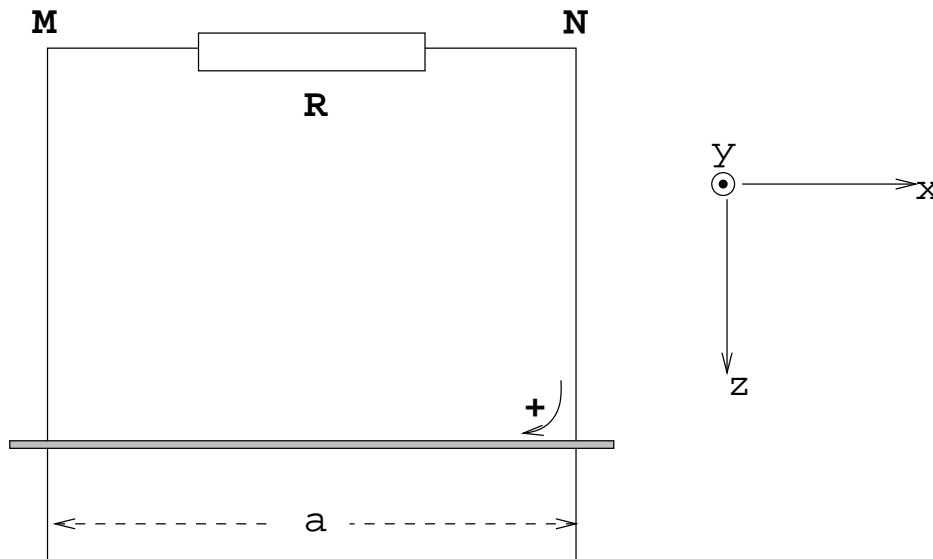
Une distribution de charges est caractérisée par un potentiel (à symétrie sphérique) :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^{-r/a}$$

1. Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  qui dérive de ce potentiel en tout point.
2. En déduire la distribution volumique de charge  $\rho(r)$  responsable de ce champ et potentiel. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $\rho(r)$ .

## II. Induction

Une barre homogène conductrice, de masse  $m$ , est assujettie à se déplacer en restant en contact avec deux rails conducteurs verticaux, distants de  $a$ . L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B\vec{e}_y$ , normal au plan des rails et orienté dans le sens négatif de l'axe des  $y$  (voir figure). Entre les extrémités  $M$  et  $N$  des barres verticales on place une résistance  $R$ . On négligera dans tout le problème : la résistance électrique de la barre et des rails ; les forces de frottement ; le champ magnétique créé par les courants induits.



1. Montrer qu'il apparaît une f.é.m.  $\mathcal{E}$  dans le circuit lorsque la barre glisse le long des rails et donner son expression en fonction de  $B$ ,  $a$  et la vitesse  $v(t)$  de la barre. Quels sont l'expression du courant instantané  $i(t)$  dans le circuit et son sens (le sens positif arbitraire choisi est indiqué sur la figure) ?
2. Montrer que la barre est soumise à une force  $\vec{F}$  d'origine électromagnétique. Donner l'expression vectorielle de cette force. Vérifier le sens de cette force à l'aide de la loi de Lenz.
3. Si les rails ont une longueur suffisante, le mouvement de la barre finit par atteindre une vitesse limite constante  $v_L$ . Quelle est la condition pour que cela soit réalisé ? Quelle est la valeur de cette vitesse limite. Que vaut alors le courant  $I$  ?  
A.N. :  $m = 10 \text{ g}$  ;  $a = 20 \text{ cm}$  ;  $B = 1 \text{ T}$  ;  $R = 1 \Omega$  ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . Calculer la vitesse limite  $v_L$  et le courant  $I$ .
4. Calculer le travail fourni par les forces de pesanteur par unité de temps quand la vitesse limite est sensiblement atteinte. Comparer cette valeur à celle de la puissance dissipée par effet Joule. Commentaires ?

### III. Energie Electrostatique

[Pour chaque question de ce problème, déterminer la formule littérale puis calculer les valeurs numériques des grandeurs demandées.]

On considère une micro-bille (particule) d'aluminium (donc conductrice) sphérique de diamètre égal à 10 nm et isolée (n pour "nano" c'est-à-dire  $10^{-9}$ ).

1. Quelle est la capacité de cette particule ? On donne  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m.
2. La masse atomique de l'aluminium est 27 g; sa masse volumique a une valeur de  $2,7 \text{ g/cm}^3$ . Il y a trois électrons libres par atome. Calculer le nombre total d'électrons libres dans la particule. On donne le nombre d'Avogadro :  $N_0 = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

De telles particules sont dispersées dans un gaz ionisé où elles se chargent négativement. Chacune d'elles acquiert un potentiel de  $-20 \text{ V}$ .

3. A quelle fraction de la charge totale des électrons libres de la particule correspond la charge  $Q$  portée par celle-ci ?
4. Calculer l'énergie électrostatique de la particule portant la charge  $Q$  précédente et supposée seule dans l'espace.
5. Calculer l'énergie nécessaire pour amener, à partir de l'infini, un électron supplémentaire sur la particule, en négligeant la variation de potentiel de celle-ci.
6. En réalité cet accroissement de charge entraîne une variation du potentiel de la particule. Calculer l'énergie électrostatique de celle-ci portant la charge  $Q + e$ . En déduire la variation de l'énergie électrostatique de la particule et la comparer avec l'énergie calculée à la question 5. Pouvez-vous commenter ce résultat ?

# Juin 2001 : Corrigé

## I. Champ et potentiel électrostatiques

### A. Champ uniforme

On utilise la relation entre champ et potentiel :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dz}\vec{e}_z \\ \Rightarrow \Phi &= -E_0z + K\end{aligned}$$

où  $K$  est une constante arbitraire. Les équipotentielles doivent vérifier l'équation  $\Phi = c^{\text{te}}$ , c'est-à-dire sont des surfaces  $z = c^{\text{te}}$ . Ce sont des plans parallèles au plan  $xy$ .

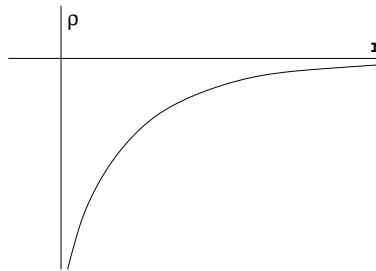
### B. Potentiel de Yukawa

1. Posons  $K = q/4\pi\epsilon_0$ .

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r = K\frac{e^{-r/a}}{r}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\vec{e}_r = \frac{Ke^{-r/a}}{ar^2}(a+r)\vec{e}_r$$

2. Le flux de  $\vec{E}$  à travers une sphère de rayon  $r$  est :

$$\phi_E = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{a} (a+r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



Quand  $r \rightarrow 0$ , alors  $Q_{\text{int}} = +q$  (une charge  $q$  à l'origine). Quand  $r \rightarrow \infty$ , alors  $Q_{\text{int}} \rightarrow 0$  (donc une charge  $-q$  distribuée dans tout l'espace). La densité de charge en dehors de l'origine peut se calculer par l'équation de Maxwell :

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = -\frac{q}{4\pi} \frac{e^{-r/a}}{a^2 r}$$

Son allure est montrée sur la figure ci-dessus.

## II. Induction

1. La fém résulte de l'apparition du champ électromoteur  $\vec{v} \times \vec{B}$  dans la barre qui met les charges en mouvement. L'expression de la fém peut s'obtenir à l'aide de la loi de Faraday :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Baz) = -Bav(t) \quad \text{avec} \quad v(t) = \frac{dz}{dt}$$

(les signes tiennent compte de l'orientation indiquée du circuit). Une fém négative signifie un courant circulant dans le sens négatif du circuit, ce qu'on peut vérifier à l'aide du produit vectoriel  $\vec{v} \times \vec{B}$  qui indique également le sens du courant positif.

2. Il s'agit de la force de Laplace. Vectoriellement, avec le courant  $i$  dans le sens des  $x > 0$  et  $\vec{B}$  dans le sens des  $y < 0$  :

$$\vec{F}_L = -iaB\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -iaB\vec{e}_z$$

donc dirigée vers le haut : c'est une force qui s'oppose au mouvement. C'est exactement ce qu'énonce la loi de Lenz.

3. Le mouvement devient uniforme (pas d'accélération) quand la force de pesanteur s'équilibre avec la force de Laplace. Si on écrit  $i(t) = I$  quand cette condition est atteinte :

$$\begin{aligned} mg &= IaB \quad \text{avec} \quad I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{aBv_L}{R} \\ \Rightarrow v_L &= \frac{mgR}{a^2B^2} \\ \text{et } I &= \frac{mg}{aB} \end{aligned}$$

A.N. :  $v_L = 2,5\text{m/s}$  et  $I = 0,5\text{A}$ .

4. Le travail des forces de pesanteur est  $dW = F_g dz$ . Donc la puissance fournie au circuit :

$$P = \frac{dW}{dt} = mg \frac{dz}{dt} = mgv_L = \frac{m^2 g^2 R}{a^2 B^2}$$

La puissance dissipée par effet Joule :

$$P' = RI^2 = \frac{m^2 g^2 R}{a^2 B^2}$$

Les deux puissances sont identiques, ce qui signifie simplement que l'énergie totale du système (Terre+circuit) est conservée à tout instant.

### III. Energie Electrostatique

1. Le potentiel  $V$  (ou  $\Phi$ ) à la surface d'une sphère conductrice de rayon  $R$  portant la charge  $Q$  est (résultat vu plusieurs fois en cours et exercices) :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

et la capacité d'un tel conducteur s'obtient par la relation de définition  $Q = CV$  (rappe-  
lons qu'une sphère conductrice peut être considérée comme un condensateur  
sphérique dont une armature est à l'infini) :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R = 5,5 \times 10^{-19} \text{ F}$$

2. Le nombre d'électrons est 3 fois le nombre d'atomes dans le volume de la particule :

$$N_e = 3 \times \frac{N_0}{27} \times \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 9,4 \times 10^4$$

3. Charge et potentiel sont liés par la même relation :

$$\begin{aligned} Q &= CV = 4\pi\epsilon_0 R V = -1,1 \times 10^{17} \text{ C} \\ \frac{Q}{N_e e} &= 7,3 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

4. L'énergie électrostatique accumulée par un condensateur portant la charge  $Q$  (ou porté à un potentiel  $V$ ) a été calculée en cours et TD. On peut éventuellement la recalculer par plusieurs méthodes : intégrer la densité d'énergie  $\epsilon_0 E^2/2$ , intégrer le travail élémentaire pour assembler une charge  $dq$  et une sphère portant une charge  $q$  etc.

$$U_e = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = 1,1 \times 10^{-16} \text{ J}$$

5. De nouveau, on peut utiliser le résultat établi pour l'énergie d'une distribution consistant en une charge  $q$  placée dans un potentiel  $V$  qui est :  $U'_e = qV = eV$ . Retrouvons ce résultat directement en calculant le travail nécessaire pour transporter la charge  $-e$  de l'infini à la surface de la sphère :

$$\begin{aligned} U'_e &= W_{\text{opérateur}} = - \int_{\infty}^R \vec{F}_{\text{Coulomb}} \cdot \vec{dl} = - \int_{\infty}^R e\vec{E} \cdot \vec{dl} = +e \int_{\infty}^R dV \\ &= eV(R) = 3,3 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

6. On calcule l'énergie comme à la question 4 :

$$U_e'' = \frac{(Q+e)^2}{2C} = 1,13 \times 10^{-16} \text{ J}$$

La variation d'énergie :

$$U_e'' - U_e = \frac{1}{2C}[(Q+e)^2 - Q^2] = \frac{eQ}{C} + \frac{e^2}{2C} = eV + \frac{e^2}{2C}$$

Le premier terme est l'énergie nécessaire pour transporter l'électron. Le second est l'énergie interne d'une distribution équivalente à la charge de l'électron répartie sur toute la surface de la sphère.

---

**Temps recommandés** : Problème I : 50 mn ; Problème II : 1h10.

Les vecteurs sont indiqués en caractères gras. On rappelle les expressions du gradient d'une fonction scalaire  $\Phi$ , de la divergence et du rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla}\times\vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

---

## I. Dépoussiérateur électrostatique

Il s'agit d'un système électrostatique destiné à éliminer des particules de poussière présentes dans des gaz industriels. Le moyen consiste à ioniser le gaz (en le soumettant à un champ électrique élevé). Les ions vont se coller sur les poussières qui dériveront dans le champ électrique, jusqu'à une électrode qui les collecte.

L'anode du système est un cylindre creux conducteur de rayon intérieur  $r_1 = 150$  mm et relié à la terre. La cathode est un fil positionné sur l'axe du cylindre, de rayon  $r_2 = 0,25$  mm. Le potentiel du fil est maintenu à  $V = -50$  kV. L'ensemble est de longueur infinie.

1. Calculer le champ électrique à l'intérieur du cylindre juste après l'application de la tension sur le fil. Expliquer pourquoi le gaz est préférentiellement ionisé près du fil.

Les ions positifs ainsi créés sont rapidement collectés par la cathode et évacués. Les ions négatifs dérivent lentement vers l'anode, formant ainsi une densité volumique de charge  $\rho(M)$ . On constate qu'à l'équilibre le champ résultant a un module  $E_0$  indépendant des coordonnées d'espace.

2. Utiliser cette dernière propriété pour calculer le module  $E_0$  du champ. Application numérique. Calculer la densité de charge  $\rho(M)$  en fonction de  $E_0$ .

On considère une poussière sensiblement sphérique et conductrice, de rayon  $a$  ( $a \ll r_1$ ).  
 Les deux questions suivantes sont purement qualitatives.

3. Montrer que la poussière sphérique va acquérir une distribution superficielle de charge. Représenter qualitativement sur un dessin cette distribution, ainsi que l'allure du champ électrique.
4. Expliquer pourquoi la sphère va capter des ions. Vers quelle électrode va-t-elle se diriger?

## II. Induction

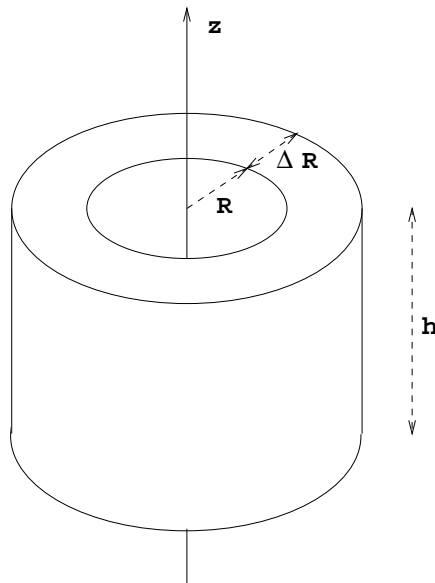


Fig.1

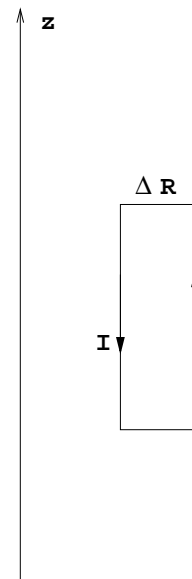


Fig.2

**A.** On considère un tore de section rectangulaire obtenu par rotation autour de l'axe des  $z$  d'un rectangle, de hauteur  $h$  et de largeur  $\Delta R$ , à la distance  $R$  de l'axe (Fig.1). On réalise une bobine torique en enroulant régulièrement sur ce tore  $N$  spires serrées de fil conducteur. Chaque spire, parcourue par un courant continu  $I$ , peut être considérée comme appartenant à un plan radial (Fig.2). Le sens du courant est celui indiqué sur la figure.

1. Quels sont la direction et le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point intérieur à la bobine à une distance  $r$  de l'axe? Quelles sont les variables dont dépend  $\vec{B}$ ? Justifier rigoureusement vos réponses.
2. Calculer  $\vec{B}$  en un point intérieur à la bobine (on vérifiera en particulier que  $\vec{B}$  ne dépend pas de  $z$ ). Calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers l'ensemble des spires qui constituent la bobine.

**B.** Un fil conducteur rectiligne infini de rayon  $r_0$  est parcouru par un courant variable  $i(t)$ .

3. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_F$  créé en tout point extérieur au fil. On supposera les courants de déplacement négligeables.
4. Expliquer pourquoi il apparaît en tout point un champ électrique  $\vec{E}$ . Quelle est la direction de ce champ; quelles sont les variables dont il dépend? Calculer ce champ  $\vec{E}$  à l'extérieur du fil. On admettra que ce champ s'annule à la surface du fil.
5. Le fil infini est placé sur l'axe  $z$  de la bobine torique de la partie **A**. Initialement, la bobine n'étant parcourue par aucun courant, l'établissement du courant  $i(t)$  crée un courant induit  $I(t)$  dans la bobine. Discuter, sur un schéma, le sens de  $I(t)$  lorsque le courant  $i(t)$  varie de manière monotone (croissante ou décroissante) et il est orienté dans le sens des  $z > 0$ .

*[Un tel système, sous le nom de "Pince Ampèremétrique", peut être utilisé pour la mesure de courants élevés dans des conducteurs (lignes haute-tension) sans que l'appareil de mesure entre en contact avec le conducteur.]*

## I. Dépoussiérateur électrostatique

1. En utilisant les symétries et invariances du système (symétrie de révolution autour d'un axe), on en déduit que le champ électrique  $\vec{E}$  (et le potentiel dont il dérive  $\Phi$ ) ne dépendent que de  $r$  (distance à l'axe) et que le champ est radial :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre centré sur l'axe, de rayon  $r$  et de hauteur  $L$  :

$$2\pi rLE = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{K}{r}$$

où  $K$  est inconnu (car  $Q_{\text{int}}$  est inconnue). Pour calculer  $K$  on va utiliser la relation entre champ et potentiel, et le fait qu'on connaît la ddp entre le fil et la surface du cylindre.

La relation entre champ et potentiel est :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{ou} \quad E(r) = -\frac{d\Phi}{dr}$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\int_{r_1}^{r_2} E(r)dr &= \int_{r_1}^{r_2} d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = V - 0 \\ V &= K \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = K \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow E(r) = \frac{V}{r \ln(r_2/r_1)} \end{aligned}$$

avec  $V < 0$ .

L'ionisation se fait plus facilement près du fil car, à cause de la dépendance en  $1/r$ , le champ est plus intense près du fil.

2. Un champ uniforme radial s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0\vec{e}_r \quad \text{et on a toujours} \quad E(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \\ \rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 &= V = -E_0(r_2 - r_1) \approx E_0r_1 \quad (r_2 \ll r_1) \\ E_0 &= \frac{V}{r_1} = -3,3 \times 10^5 \text{ V/m} \end{aligned}$$

Calcul de la densité de charge par la 1<sup>ère</sup> équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_0) = \frac{E_0}{r}$$

$$\rightarrow \rho(M) = \frac{\epsilon_0 E_0}{r} \quad (< 0)$$

3. La poussière se comporte comme une sphère conductrice initialement neutre. Soumis à un champ radial (orienté vers le fil) elle va se polariser, c'est-à-dire que ses charges surfaciques positives vont suivre la direction du champ (vers le fil central) et ses charges négatives s'accumuler sur la surface opposée au fil.
4. Les ions négatifs remontent le champ électrique vers la paroi du cylindre. En chemin, en passant à proximité des poussières, ils vont être attirés par les charges surfaciques positives de ces poussières. Ayant capturé ces ions négatifs, la poussière a maintenant une charge totale négative donc elle va se diriger vers l'anode.

## II. Induction

1. Tout plan contenant l'axe des  $z$  est un plan de symétrie des courants : le champ magnétique est donc ortho-radial. Le système étant invariant par rotation autour de l'axe, le champ ne dépend pas de  $\varphi$  :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\varphi$$

2. On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire centré sur l'axe et de rayon  $r$  ( $R < r < R + \Delta R$ ).

$$2\pi r B = -\mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers l'ensemble des spires est :

$$\begin{aligned} \phi &= N \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_R^{R+\Delta R} \mu_0 \frac{N I h dr}{2\pi r} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 h I}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{\Delta R}{R} \right) \end{aligned}$$

Pour les signes, dans cette expression, on a pris le sens de  $d\vec{S}$  (arbitrairement) parallèle à  $\vec{B}$ .

3. On utilise le théorème d'Ampère identiquement à ci-dessus, mais cette fois le courant intérieur à la boucle est celui du fil  $i(t)$  :

$$\vec{B}_F = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

4. Le courant étant variable, le champ  $\vec{B}_F$  l'est également. La 3<sup>ème</sup> équation de Maxwell donne :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_F}{\partial t}$$

avec  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_z$  (normal aux plans d'antisymétrie des courants).

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{dE}{dr}\vec{e}_\phi \quad \text{d'où} \quad \frac{dE}{dr} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{di}{dt}$$

Avec  $\vec{E} = \vec{0}$  pour  $r = r_0$ , on a finalement :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{dt} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z$$

5. On peut utiliser le résultat précédent pour le champ électrique, les lois de Faraday ou de Lenz pour obtenir la réponse : sur la spire montrée sur la Fig.2, le courant induit  $I$  est dans le sens direct (trigonométrique) quand  $i(t)$  croît et dans le sens opposé quand  $i(t)$  décroît.